
																			
Prof. Eduardo García Varillas																			
eduardo_garcia@my.unitec.edu.mx																			
edel0@hotmail.com																			
http://eqndiferenciales.wikispaces.com																			
																			1

jueves, 22 de marzo de 2012																			
Unidad 4 ED de orden superior																			
																			2

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

Caso I ED de Orden Superior. Homogéneas.

- ✓ Los coeficientes son constantes
- ✓ Igualada a cero (homogénea)
- ✓ Obtener la ecuación auxiliar y/o característica

Ejemplo $5y'' + 3y' - 4y = 0$

\downarrow \downarrow
 r^2 r

Auxiliar $5r^2 + 3r - 4 = 0$

$r_1 = 0.64$ $r_2 = -1.24$

3

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

$r_1 = r_2$ reales $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$

$r_1 \neq r_2$ reales $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

r_1, r_2 Complejos

$C = \alpha + \beta i$ $y = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$

$r_1 = 0.64$ $r_2 = -1.24$

$y = C_1 e^{0.64x} + C_2 e^{-1.24x}$

4

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

(2) $4y'' + 16y = 0$

Ⓐ Aux $4r^2 + 16 = 0$

Ⓑ $4r^2 = -16$
 $r^2 = -4$

$r = \pm\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$
 $\alpha = 0$ $\beta = 2$

$y = e^{\alpha x} [C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x]$

Ⓒ $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

5

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

Principio de multiplicidad

E.D. Soluciones $\begin{cases} \text{General } (y_c) \\ \text{Particular } (y_p) \end{cases}$

E.D. de Orden Superior $\xrightarrow{\text{Sol}} y_c + y_p$

$y_c = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$y_p = 4e^{2x}$
 $y_p = 4xe^{2x}$

No es válida

6

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

Caso (II) ED de Orden Superior con coeficientes indeterminados.

(*) $y'' + y' + y = g(x)$

(P1) $y'' + y' + y = 0$
Ec Aux
 $r^2 + r + 1 = 0$
 $y_c =$

(P2) Proponer y_p dependiendo de la forma de $g(x)$

(P3) y_p se deriva tantas veces como lo indique la ED y se sustituyen en (*)

(P4) Se obtienen los coef. de y_p

(P5) Sol. final
 $y = y_c + y_p$

$g(x)$
Polinomio $Ax^k + Bx^{k-1} + \dots + Z$
 e^{ax} Ae^{ax}
 $\begin{cases} \text{sen } ax \\ \text{cos } ax \\ \text{sen } ax + \text{cos } ax \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} A \text{ sen } ax + B \text{ cos } ax \end{array} \right.$

7

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

Caso (III) $y'' + y' - y = g(x)$

(P1) Ec Auxiliar
 $y_c = c_1 \boxed{} + c_2 \boxed{}$
 $\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $y_1 \quad \quad y_2$

(P2) $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$

(P3)

(P4) $V_1 = \int \frac{y_2 g(x)}{W}$

(P5) $V_2 = \int \frac{y_1 g(x)}{W}$
 $y_p = y_c + y_p$

$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

8

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$$

Aux

$$r^2 + 4 = 0$$

$$\begin{matrix} r_1 = -2i & \alpha = 0 \\ r_2 = 2i & \beta = 2 \end{matrix}$$

$$y_c = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

$$V_1 = \int \frac{(-\sin 2x) \left(\frac{1}{\cos 2x} \right)}{2} dx$$

$$V_1 = -\frac{1}{2} \ln(\cos 2x)$$

$$V_2 = \int \frac{\cos 2x \left(\frac{1}{\cos 2x} \right)}{2} dx$$

$$V_2 = \frac{1}{2} x$$

$$W = \begin{vmatrix} y_1 = \cos 2x & y_2 = \sin 2x \\ y_1' = -2\sin 2x & y_2' = 2\cos 2x \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x$$

$$W = 2$$

$$y_p = -\frac{1}{2} \ln(\cos 2x) \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x$$

$$y_g = y_c + y_p$$

9

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

Caso II ED Lineales No homogéneas
CAUCHY-EULER (Variación de Parámetros)

$$x^2 y'' + x y' + y = g(x)$$

(P1) Igualar a cero (Hacerla homogénea)

(P2) Proponer un cambio de variable $y = x^r$

(P3) Obtener la ec. auxiliar.

$$\begin{matrix} r_1 = r_2 & \text{reales} & y_c = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_1} \cdot \ln(x) \\ r_1 \neq r_2 & \text{reales} & y_c = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2} \\ r_1, r_2 & \text{complejas} & y_c = x^{\alpha} [C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)] \end{matrix}$$

(Aplicando Variación de Parámetros)

$$y_c = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

(P4) $y_p = V_1 y_1 + V_2 y_2$ (Wronskiano)

$$y_g = y_c + y_p$$

10

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

EJEMPLO $x^2 y'' - 2xy' - 4y = 0$

$y = x^r$ $y' = r x^{r-1}$ $y'' = r(r-1) x^{r-2}$

Sust. en la ED

$$x^2 [r(r-1) x^{r-2}] - 2x [r x^{r-1}] - 4 [x^r] = 0$$

$x^r \quad \uparrow \quad x^r \quad \uparrow \quad x^r \Rightarrow$ Factorizar

$$r(r-1) - 2r - 4 = 0 ; \quad r^2 - r - 2r - 4 = 0$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0$$

$r_1 = -1$ $y_1 = y_2 = C_1 X^{-1} + C_2 X^4$

$r_2 = 4$

11

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

UNIDAD 5 APLICACIONES

$a y'' + b y' + c y = f(x)$ ↗ Fuerza Externa

└──────────┘ → Son constantes

- Sistemas Resorte-Masa
- RLC
- Señales.

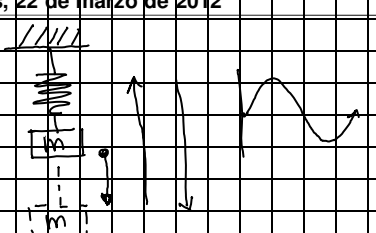
RESORTE - MASA (Ley de Hook)

$F = k \cdot s$

Fuerza k: cte. de Rigidez

12

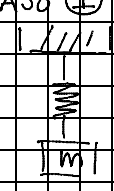
jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México



$T = \frac{2\pi}{\omega}$
 $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$W = mg$

Caso I Mov. Libre NO amortiguado (ideal)



- Aislado (No fricción)
- No hay amortiguamiento
- Fzas:

$$F = k \cdot s$$

13

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

$$y'' + \frac{k}{m} y = 0$$

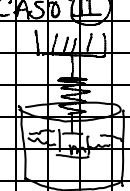
$\frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Aux. $r^2 + \frac{k}{m} = 0$

$$y(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$y'(0) = \frac{dy}{dt} = 0$
 $y(0) = y_0 \quad (t=0)$

Caso II Mov. Libre Amortiguado.



- Se sumerge en un medio viscoso
- medio viscoso $C = +$ (amortiguamiento)
- Fza retardadora

$$C \frac{dy}{dt}$$

14

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

$$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0 \quad \frac{c}{m} = 2\alpha \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

α ω

$\alpha = \omega$ $y = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 t e^{-\alpha t}$ Crit. Amortiguado

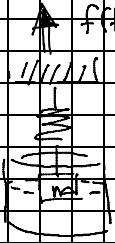
$\alpha > \omega$ $y = e^{-\alpha t} \left[C_1 e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t} \right]$ sobre

$\alpha < \omega$ $y = e^{-\alpha t} \left[C_1 \cos \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t \right]$ sub

15

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

CASO (II) Mov. Forzado con Amortiguamiento



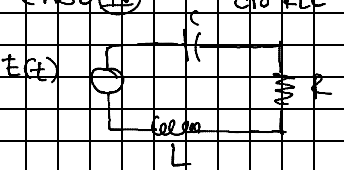
$$y'' + \frac{c}{m} y' + \frac{k}{m} y = \frac{f(t)}{m}$$

$$2\alpha = \frac{c}{m} \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad F(t) = \frac{f(t)}{m}$$

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = F(t)$$

Cof. Indet. o RL
Var. Parámetros.

CASO (IV)



$$L q'' + R q' + \frac{1}{C} q = E(t)$$

16

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

masa [slugs] peso [lb]

EJEMPLO.
Resorte, Contrapeso 8 lb, $K = 16 \text{ lb/ft}$.

Hallar la ec. del movimiento (solución) y el periodo

$W = 8 \text{ lb}$ $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$

$W = m \cdot g$ $m = \frac{W}{g} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \text{ slug}$

$\omega^2 = \frac{K}{m} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64 \text{ lb/ft}$ $\omega = 8$

$y(t) = C_1 \cos 8t + C_2 \sin 8t$

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ seg.}$

17

jueves, 22 de marzo de 2012

UNITEC
Universidad Tecnológica de México

Determinar la carga ($q(t)$) del capacitor RLC

$L = 0.05 \text{ H}$ $R = 40$ $C = 0.01 \text{ f}$ $E(t) = 0 \text{ V}$

Condiciones: $q(0) = 5 \text{ Coulombs}$ $i(0) = 0 \text{ A}$

$0.05 q'' + 4 q' + 100 q = 0$ $\rightarrow \frac{1}{0.05}$

Aux $0.05 r^2 + 4r + 100 = 0$ $r_1 = -40 + 20i$
 $r_2 = -40 - 20i$

$q(t) = e^{-40t} [C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t]$

$q(0) = 5$

$5 = (1) [C_1 (1) + C_2 (0)]$

$C_1 = 5$

18

jueves, 22 de marzo de 2012 **UNITEC**
Universidad Tecnológica de México

$I(0) = 0 \rightarrow I(t) = \frac{dq}{dt}$

$q(t) = e^{-40t} \left[C_1 \cos 20t + C_2 \sin 20t \right] \quad (u \cdot v = u'v + v'u')$

$q'(t) = e^{-40t} \left[-100 \sin 20t + 20 C_2 \cos 20t \right] +$
 $\left[5 \cos 20t + C_2 \sin 20t \right] (-40 e^{-40t})$

$I = q' = 0 \quad t = 0$

$0 = (1) [0 + 20 C_2] + [5 + 0] [-40] \quad \boxed{C_2 = 10}$

$q(t) = e^{-40t} [5 \cos 20t + 10 \sin 20t] \quad \text{Coulombos}$

19